UNIVERSITE PAUL SABATIER

L2 Physique et Sciences Physiques et Chimiques

Année Universitaire 2011–2012

Electromagnétisme

Examen Mai 2012 (Durée 2h00)

I. Questions de cours : loi d'ohm dans les métaux

On considère un milieu conducteur linéaire, isotrope et non dispersif, de conductivité électrique γ. On applique à l'instant $t=t_o$ un champ électrique alternatif $\vec{E} = E_0 \cos(2\pi\nu t)\vec{e}_z$ ($\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i2\pi\nu t)\vec{e}_z$ en notation complexe) de fréquence ν.

1. A partir de la loi de conservation de la charge électrique et de l'équation de Maxwell-Gauss, écrire l'équation différentielle à laquelle obéit la densité volumique de charge ρ(M, t) en un point M à l'instant t sachant que la densité volumique de charge à l'instant t_0 est ρ(M, t_0)= ρ_0.

2. Montrer que dans le cas d'un conducteur ohmique en cuivre (γ=5.9 10^7 S.m^{-1}), ρ(M, t) tends très rapidement vers zéro avec un temps relaxation $\tau=\varepsilon_0/\gamma$ dont on donnera la valeur numérique.

3. Calculer le rapport r des amplitudes du courant volumique de conduction J et du courant volumique de déplacement J_D pour une fréquence ν de 1 MHz. Quelle conclusion peut –on tirer de la valeur de r ?

4. Quelle est la condition à laquelle la fréquence maximale $\nu_{\max}$ du champ électrique appliqué doit obéir pour que ce dernier soit considéré comme **statique** à l'intérieur du conducteur ? Dans quelle approximation alors se place t-on?

5. Ecrire alors en tenant compte des questions 2 et 3 les quatre équations de Maxwell pour un milieu conducteur.

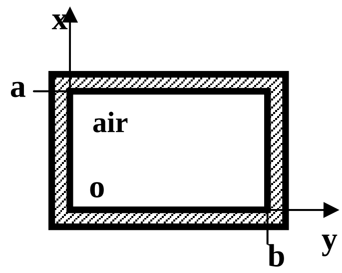
On considère que le milieu conducteur est un fil de cuivre, assimilé à un cylindre d'axe Oz et de rayon a, soumis aux champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 J\rho}{2}\vec{e}_\varphi$ approximés maintenant comme statiques.

6. Donner en régime permanent l'équation exprimant la conservation de l'énergie électromagnétique dans le fil de cuivre. Montrer que le flux du vecteur de Poynting entrant dans le fil de cuivre est égal à la puissance dissipée par effet joule.

Rappel : permittivité du vide ε_0=8.85 10^{-12} F.m^{-1}

II. Propagation guidée dune onde électromagnétique transverse électrique

On considère un guide d'ondes de section rectangulaire (voir figure ci-dessous) d'axe parallèle à Oz. C'est un tube métallique creux rempli d'air de section rectangulaire de dimensions a suivant x et b suivant y. Le métal du guide d'ondes est supposé parfaitement conducteur (conductivité électrique $\gamma \to \infty$). Les ondes électromagnétiques se propagent suivant l'axe Oz perpendiculaire à la figure. On assimilera l'air au vide (ε_0, μ_0 et $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$).



Partie A.

Une onde TE_{01} (*transverse électrique zéro-un*) de pulsation ω se propage dans le guide. Son champ électrique $\vec{E}(y,z,t)$ s'écrit à l'instant t et au point de coordonnées x, y, z ($0<x<a$, $0<y<b$) :

$$\vec{E}(y,z,t) = E_0 \sin(\frac{\pi y}{b}) \cos(wt - kz)\, \vec{e}_x \qquad (\underline{\vec{E}}(y,z,t) = E_0 \sin(\frac{\pi y}{b}) \exp[i(wt - kz]\, \vec{e}_x)$$

où E_0 et k sont des constantes réelles strictement positives.

1. Préciser le sens de propagation et la nature de la polarisation de l'onde électromagnétique. Justifier le nom « ***transverse électrique*** » donné à l'onde étudiée.
2. Vérifier l'équation de Maxwell-Gauss.
3. Montrer que $\vec{E}(y,z,t)$ vérifie les conditions aux limites en $x = 0$, $x=a$; $y=0$ et $y=b$.
4. Donner l'équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle doit satisfaire le champ électrique. Montrer que l'équation de propagation se réduit à : $-\dfrac{\pi^2}{b^2} - k^2 + \dfrac{\omega^2}{c^2} = 0$.
5. En déduire que la propagation de l'onde électromagnétique dans le guide n'est possible que pour des pulsations ω supérieures à une pulsation de coupure ω_c que l'on déterminera.
6. Déterminer les vitesses de phase V_ϕ et de groupe V_g de l'onde TE_{01} dans le guide. Représenter leur variation respective en fonction de ω.
7. A l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, montrer que le champ magnétique $\vec{B}(y,z,t)$ de l'onde TE_{01} dans le guide s'écrit :

$$\vec{B}(y,z,t) = \frac{k\, E_0}{\omega} \sin(\frac{\pi y}{b}) \cos(wt - kz)\, \vec{e}_y + \frac{E_0 \pi}{\omega b} \cos(\frac{\pi y}{b}) \sin(wt - kz)\, \vec{e}_z$$

8. Vérifier l'équation de Maxwell-flux. Vérifier que $\vec{B}(y,z,t)$ vérifie les conditions aux limites.

9. Pourquoi l'onde électromagnétique guidée n'est pas une onde transverse électrique magnétique TEM ?

Partie B.

1. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ et sa valeur moyenne $<\vec{R}>_T$ dans le temps.

2. Déterminer le flux moyen $<P>_T$ de $<\vec{R}>_T$ à travers une section droite (*ab*) du guide (*z*=cte) en fonction de E_0, a, b, μ_0, k et ω.

On montre que l'énergie électromagnétique moyenne par unité de longueur de guide $<\xi_{em}>_T$ /dz s'écrit: $\frac{<\xi_{em}>_T}{dz} = \frac{\varepsilon_0 \ E_0^2 ab}{4}$

3. Montrer que la vitesse de propagation V_e de l'énergie électromagnétique dans le guide d'ondes s'identifie à la vitesse de groupe V_g.

Rappels :

a) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = div(\overrightarrow{grad}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$

b) Equations de passage:

Conservation de la composante normale du champ magnétique : $\vec{n}_{12}.(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$

Conservation de la composante tangentielle du champ électrique $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$

c) $<\sin^2(\frac{\pi y}{b})> \ =<\cos^2(\frac{\pi y}{b})> \ = \frac{b}{2}$

d) $V_\phi V_g = c^2$.